Prof. Dr. Alfred Toth

Einfachste Grundbegriffe einer topologischen Semiotik

0. Einleitung

Der Mathematisierung zugänglich ist grundsätzlich jede Menge von irgendwelchen Objekten, auf denen irgendeine Struktur definiert ist, also auch die Semiotik. Wie üblich, verstehen wir unter einer Menge "eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d.h. zu einem neuen Ding (Hausdorff 1914: 1). Besteht die Struktur aus einer Menge von Operationen, so sind wir in der Algebra, besteht sie aus Relationen, in der Ordnungstheorie, und besteht sie aus Teilmenge der Menge selbst, so sind wir in der Topologie.

1. Trägermengen und Strukturen

Im Falle der Semiotik lassen sich verschiedene Objekte als **Trägermengen** bestimmen. Im Anschluß an Hilbert (1987: 2) können wir beispielsweise von **linearer, ebener und räumlicher Semiotik** sprechen und die Primzeichen als Elemente der linearen, die Prim- und die Subzeichen als Elemente der ebenen und die Prim- und Subzeichen sowie die Zeichenklassen und Realitätsthematiken als Elemente der räumlichen Semiotik auffassen (Toth 1999: 15ff.).

Es ist eine bekannte Tatsache, daß man auf einer Trägermenge sehr verschiedene **Topologien** definieren kann. Die beiden extremen Fälle sind die **diskrete** (feinste) Topologie, welche aus allen Teilmengen der Trägermenge, also ihrer Potenzmenge, besteht, und die **indiskrete** (gröbste) Topologie, welche nur aus der Trägermenge und der leeren Menge besteht. Wir beschränken uns im folgenden auf diese beiden Fälle und verweisen für weitere Strukturen auf Steen und Seebach (1970: 43ff.), auf deren Darstellung auch die folgenden Ausführungen basieren.

2. Definitionen der Topologie

2.1. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, τ) bestehend aus einer Trägermenge X und einer Menge von Teilmengen τ, genannt offene Mengen, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen: 1. Die Vereinigung offener Mengen ist eine offene Menge; 2. Der endliche Durchschnitt offener Mengen ist eine offene Menge; 3. X und die leere Menge $\varnothing$ sind offene Mengen. Eine Teilmenge von X ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement eine offene Menge von X ist. Abgeschlossene Mengen müssen folgenden drei Bedingungen genügen: 1. Die Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist eine abgeschlossene Menge 2. Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist eine abgeschlossene Menge; 3. X und $\varnothing$ sind abgeschlossene Mengen. Es ist also möglich, daß eine Teilmenge sowohl offen als auch abgeschlossen bzw. weder offen noch abgeschlossen ist.

Semiotische topologische Räume sind die Paare (S, σ), wobei $S = \{.1., .2., .3.\}$, $\sigma_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \varnothing\}$ und $\sigma_2 = \{S, \varnothing\}$. σ_1 induziert also die diskrete, σ_2 die indiskrete Topologie auf S. Wie man sieht, sind alle drei Bedingungen für offene ebenso wie für abgeschlossene Mengen erfüllt. Da die Topologie auf einem diskreten Raum durch die diskrete Uniformität generiert wird, die aus allen Teilmengen $X \times X$ besteht, welche die Diagonale enthalten, ist die semiotische Klasse der genuinen Kategorien 3.3 2.2 1.1 eine Basis für diese Uniformität.

2.2. In einem topologischen Raum (X, τ) ist eine **Umgebung** U einer Menge A jede Teilmenge von X, welche eine offene Menge enthält, die A enthält.

In (S, σ_1) und in (S, σ_2) sind alle Punkte **semiotische Umgebungen** von sich selbst. Da ein topologischer Raum "gleichzeitig durch verschiedene Umgebungssysteme definiert werden [kann], die dann aber notwendig gleichwertig sind" (Alexandroff und Urysohn 1924: 258), ist es im Prinzip gleichgültig, welche semiotischen Elemente man als Trägermenge zur Definition der semiotischen Umgebungen wählt.

2.3. Unter **Berührungspunkten** versteht man diejenigen Punkte von (X, τ), bei denen jede Umgebung von X mindestens einen Punkt mit X gemeinsam hat. Dabei wird unterschieden zwischen **inneren** und **äußeren Punkten, Randpunkten** und **isolierten Punkten**. Die nicht-isolierten Punkte werden auch **Häufungspunkte** genannt. Enthält X keine isolierten Punkte, sagt man auch, X sei **dicht in sich**.

In (S, σ_1) ist jeder Punkt ein **isolierter semiotischer Punkt**. Kein Punkt ist also ein **semiotischer Häufungspunkt**, aber alle Punkte sind **semiotische Berührungspunkte**. Nur $\varnothing$ ist nirgendwo dicht. In (S, σ_2) ist jeder Punkt ein semiotischer Häufungspunkt für jede Teilmenge von X, und jede Folge konvergiert gegen jeden Punkt von X. Jede Teilmenge, welche mehr als einen Punkt enthält, ist außerdem **semiotisch dicht in sich**. Die einzige Teilmenge, welche nirgendwo dicht ist, ist $\varnothing$.

2.4. Unter der **abgeschlossenen Hülle** einer Menge X versteht man die Menge X zusammen mit ihren Randpunkten. Dabei schreiben wir X^- für die abgeschlossene Hülle, X° für den **offenen Kern**, und ∂X für den **Rand**.

In (S, σ_1) gilt für jedes $R \subseteq S$: $R = R^\circ = R^-$ und $\partial R = \varnothing$. In (S, σ_2) gilt für $R \neq S$: $R^\circ = R^{\circ -} = R^{\circ - \circ} = \varnothing$ und für $R \neq \varnothing$: $R^- = R^{-\circ} = R^{-\circ -} = S$. Wenn $R \neq S$ oder $\varnothing$, so gilt: $\partial R = S$, $\partial\partial R = \varnothing$. Dabei heißt also R^- eine **semiotische abgeschlossene Hülle**, R° ein **semiotischer offener Kern** und ∂R ein **semiotischer Rand**.

2.5. Falls für zwei Mengen A und B gilt: $A^- \cap B = A \cap B^- = \varnothing$, heißen A und B **separierte** Mengen. Eine Menge heißt **zusammenhängend**, wenn sie nicht als Vereinigung von zwei separierten Mengen geschrieben werden kann. Ein topologischer Raum heißt **wegzusammenhängend**, wenn es für jedes Paar von Punkten a und b einen Weg f gibt, so daß $f(0) = a$ und $f(1) = b$ (analog für **bogenzusammenhängend**). Eine Menge ohne disjunkte offene Teilmengen heißt **hyperzusammenhängend**, und eine Menge ohne disjunkte abgeschlossene Teilmengen **ultrazusammenhängend**. Eine Menge A heißt **dicht** in einem topologischen Raum X, wenn jeder Punkt von X ein Punkt oder ein Häufungspunkt von A ist, d.h. wenn $X = A^-$. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge hat.

Da S aus mehr als einem Punkt besteht, ist (S, σ_1) **semiotisch nicht-zusammenhängend**, aber **semiotisch lokal wegzusammenhängend** und also **semiotisch lokal zusammenhängend**. (S, σ_2) ist **semiotisch wegzusammenhängend** und daher **semiotisch zusammenhängend**, aber (da S **semiotisch abzählbar** ist) **semiotisch nicht-bogenzusammenhängend**. (S, σ_2) ist sowohl s**emiotisch hyperzusammenhängend**, als auch **semiotisch ultrazusammenhängend** und darüber hinaus **semiotisch separabel**, da jede Teilmenge **semiotisch dicht** ist.

2.6. Sei $\underline{D} \subseteq P(X)$, dann heißt D eine **Überdeckung** von X, wenn X die Vereinigung aller $D \in \underline{D}$ ist. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält und **lokal kompakt**, wenn jeder Punkt in einer kompakten Überdeckung enthalten ist.

Ein topologischer Raum heißt **σ-kompakt**, wenn er die Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen ist. Ein topologischer Raum heißt **lindelöfsch**, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung hat. Ein topologischer Raum heißt **sequentiell kompakt**, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

(S, σ_1) ist **semiotisch lokal kompakt**, weil jeder Punkt seine eigene Umgebung bildet. Da S abzählbar ist und die offene Überdeckung durch diskrete Punkte lokal endlich und feiner ist als alle anderen offenen Überdeckungen, ist (S, σ_1) auch **semiotisch parakompakt**. (S, σ_1) ist ferner **semiotisch σ-kompakt** und **semiotisch lindelöfsch** (und weist außerdem wie alle diskreten topologischen Räume sämtliche Kompaktheitseigenschaften auf). In (S, σ_2) ist jede Teilmenge **semiotisch kompakt** und **semiotisch sequentiell kompakt**.

2.7. Eine Funktion f von einem topologischen Raum (X, τ) auf einen topologischen Raum (Y, σ) heißt **stetig**, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen (bzw. das Urbild jeder abgeschlossenen Menge geschlossen) ist.

Jede Funktion sowohl auf (S, σ_1) als auch auf (S, σ_2) ist **semiotisch stetig**.

3. Trennungsaxiome

Die Trennungsaxiome T_i geben den Grad an, in welchem verschiedene Punkte oder abgeschlossene Mengen durch offene Mengen separiert werden. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann gelten folgende Axiome:

T_0-Axiom: Wenn $a, b \in X$, dann gibt es eine offene Menge $O \in \tau$, so daß entweder $a \in O$ und $b \notin O$, oder $b \in O$ und $a \notin O$ (**Kolmogoroff-Raum**).
T_1-Axiom: Wenn $a, b \in X$, dann gibt es offene Mengen $O_a, O_b \in \tau$, welche a bzw. b enthalten, so daß $b \notin O_a$ und $a \notin O_b$ (**Fréchet-Raum**).
T_2-Axiom: Wenn $a, b \in X$, dann gibt es disjunkte offene Mengen O_a und $O_b \in \tau$, welche a bzw. b enthalten (**Hausdorff-Raum**).
T_3-Axiom: Wenn A eine abgeschlossene Menge ist und b ein Punkt, der nicht in A liegt, dann gibt es disjunkte offene Mengen O_A und O_b, welche A bzw. b enthalten.
T_4-Axiom: Wenn A und B disjunkte abgeschlossene Mengen in X sind, dann gibt es disjunkte offene Mengen O_A und O_B, welche A bzw. B enthalten.
T_5-Axiom: Wenn A und B separierte Mengen in X sind, dann gibt es disjunkte offene Mengen O_A und O_b, welche A bzw. B enthalten.

Da man diskrete Räume durch die diskrete Metrik $d(x, y) = 1$, falls $x \notin y$ und $d(x, y) = 0$, falls $x = y$ erhalten kann, erfüllt jeder diskrete Raum und also auch (S, σ_1) alle fünf **semiotischen Trennungsaxiome**. (S, σ_1) heißt im Falle von T_0 **semiotischer Kolmogoroff-Raum**, im Falle von T_1 **semiotischer Fréchet-Raum** und im Falle von T_2 **semiotischer Hausdorff-Raum**. Weil (S, σ_1) T_3 und T_0 und daher auch T_2 erfüllt, ist er ein **semiotischer regulärer Raum**, und weil er T_4 und T_1 und also auch T_3 erfüllt, ist er auch ein **semiotischer normaler Raum**, und da er außerdem auch T_5 erfüllt, ein **semiotisch vollständig normaler Raum**. (S, σ_2) dagegen erfüllt nicht T_0, aber trivialerweise T_3, T_4 und T_5.

4. Metrisierbarkeit

Eine **Metrik** für eine Menge X ist eine Abbildung d von X × X in die nicht-negativen reellen Zahlen, so daß alle x, y, z die folgenden Bedingungen erfüllen: 1. d(x, x) = 0; 2. d(x, z) ≤ d(x, y) + d(y, x); 3. d(x, y) = d(y, x). Falls x ≠ y, dann gilt d(x, y) > 0. d(x, y) heißt der **Abstand** zwischen x und y. Ein topologischer Raum mit einer metrischen Topologie heißt ein **metrischer Raum**. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **metrisierbar**, wenn es eine Metrik d gibt, welche die Topologie τ ergibt.

Die Topologie von (S, σ_1) kann man bekommen von der diskreten **semiotischen Metrik** d(x, y) = 1, wenn x ≠ y, und d(x, y) = 0, wenn x = y. In (S, σ_2) ist S semiotisch **pseudometrisierbar**, jedoch **semiotisch nicht-metrisierbar**.

5. Filter und Ultrafilter

Ein **Filter** auf einer Menge X ist eine Familie F̲ von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften: 1. Jede Teilmenge von X, welche eine Menge von F̲ enthält, gehört zu F̲; 2. Jeder endliche Durchschnitt von Mengen von F̲ gehört zu F̲; 3. ∅ gehört nicht zu F̲. Erfüllt eine Menge nur die Bedingungen 2. und 3., heißt sie eine **Filterbasis** auf X. Wenn F̲ und F̲' zwei Filter auf der gleichen Menge X sind, heißt F' **feiner** als F (bzw. F **gröber** als F'), falls F ⊂ F' gilt. Hat ein Filter F̲ die Eigenschaft, daß es keinen Filter gibt, der feiner ist als F̲, dann heißt F̲ ein **Ultrafilter** auf X.

Für (S, σ_1) erfüllt F̲ = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2, 3}} die Bedingungen einer **semiotischen Filterbasis**, eines **semiotischen Filters** sowie eines **semiotischen Ultrafilters**. Für (S, σ_2) erfüllt F̲ = {{1, 2, 3}} trivialerweise ebenfalls alle Bedingungen. Interessanter wird es, wenn wir anstatt von Elementen der linearen von Elementen der ebenen oder der räumlichen Semiotik ausgehen. Sei zum Beispiel A̲ das Doppeltripel mit den beiden Tripeln A = {{3.2}, {2.2}, {2.3}} und B = {{3.1}, {2.3}, {3.3}}. Da die beiden Mengen A und B weder leer sind, noch die leere Menge enthalten und da im Durchschnitt beider Mengen der Punkt {2.3} enthalten ist, stellt A̲ eine semiotische Filterbasis dar. Keine semiotische Filterbasis stellt dagegen etwa das Doppeltripel B̲ mit den beiden Tripeln C = {{2.1}, {2.2}, {2.3}} und D = {{3.1}, {3.2}, {3.3}} dar, denn C ∩ D = ∅ (vgl. hierzu ausführlich Toth 1999: 186-257).

6. Zusammenfassende Übersicht der Eigenschaften einer topologischen Semiotik

Im folgenden fassen wir, bevor wir uns speziellen topologischen Gebilden zuwenden, die bisher für (S, σ_1) und (S, σ_2) gewonnenen Ergebnisse zusammen und ergänzen sie mit weiteren Eigenschaften der diskreten und der indiskreten semiotischen Topologien, wobei wir dem Katalog von Steen und Seebach (1970: 170f.) folgen[1] (1 bedeutet, daß die betreffende Topologie das entsprechende topologische Kriterium erfüllt, 0 bedeutet, daß sie es nicht erfüllt):

[1] Wo keine eingebürgerten deutschen Begriffe vorhanden sind, verwenden wir die amerikanische Terminologie.

	(S, σ_1)	(S, σ_2)		(S, σ_1)	(S, σ_2)
T_0	1	1	metakompakt	1	1
T_1	1	1	abzählbar parakompakt	1	1
T_2	1	1	abzählbar metakompakt	1	1
$T_{2.5}$	1	1	vollständig normal	1	0
T_3	1	1	vollständig T_4	1	1
$T_{3.5}$	1	1	zusammenhängend	0	1
T_4	1	1	wegzusammenhängend	0	1
T_5	1	1	bogenzusammenhängend	0	-
urysohnsch	1	0	hyperzusammenhängend	0	1
semiregulär	1	0	ultrazusammenhängend	0	1
regulär	1	0	lokalzusammenhängend	1	1
vollständig regulär	1	0	lokal wegzusammenh.	1	1
normal	1	1	lokal bogenzusammenh.	1	-
vollständig normal	1	1	biconnected	0	-
perfekt normal	1	1	mit Streuungspt. versehen	0	-
komptakt	1	1	total wegzusammenh.	1	0
σ-kompakt	1	0	total unzusammenh.	1	0
lindelöfsch	1	0	total separiert	1	0
abzählbar kompakt	1	0	extremal unzusammenh.	1	0
sequentiell komptakt	1	0	nulldimensional	1	1
schwach abzählbar komptakt	1	0	scattered	1	0
pseudokompakt	1	0	diskret	1	0
lokalkompakt	1	0	metrisierbar	1	0
stark lokalkompakt	1	1	σ-lokale endliche Basis	1	1
separabel	1	1	topologisch vollständig	1	-
second countable	1	1	second category	1	1
first countable	1	1	abzählbar	1	-
abzählbare Kettenbedingung	1	1	Kard. < c	1	-
parakompakt	1	1	Kard. = c	0	-
			Kard. nicht > 2^C	1	-
			stark zusammenhängend	0	1

7. Topologische Gruppen

Sei (X, ○) eine Gruppe und (X, τ) ein topologischer Raum, dann heißt (X, ○, τ) eine **topologische Gruppe**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. Die Verknüpfung ○ ist stetig (dann gibt es zu jeder Umgebung W des Punktes x ○ y Umgebungen U von x und V von y so, daß für alle u ∈ U und v ∈ V gilt: u ○ v ∈ W); 2. Die Inversenbildung $x \rightarrow x^{-1}$ in X ist stetig (dann gibt es zu jeder Umgebung W des Punktes x^{-1} eine Umgebung des Punktes x mit $u^{-1} \in$ W für alle u ∈ U).

Wie in Toth (2005) gezeigt, gibt es drei semiotische Gruppen (S $\circ_1$), (S $\circ_2$) und (S $\circ_3$), welche außerdem die beiden obigen Bedingungen erfüllen, da nach Kap. 2.7. sowohl (S, σ_1) als auch (S, σ_2) stetig sind. Damit sind also (S, $\circ_1$, σ_1), (S, $\circ_2$, σ_1), (S, $\circ_3$, σ_1) und (S, $\circ_1$, σ_2), (S, $\circ_2$, σ_2), (S, $\circ_3$, σ_2) **semiotische topologische Gruppen**. Da es nach Toth (2005) ferner sechs semiotische Quasigruppen (drei kommutative und drei nicht-kommutative) gibt, erhebt sich die Frage nach dem mathematischen ebenso wie nach dem semiotischen Status von **topologischen Quasigruppen** (u.a. **semiotischen topologischen Loops**).

Nun wissen wir aus der Mathematik, daß die additiven Gruppen ($\mathbf{R}^n$, +, ·) mit der üblichen Topologie des $\mathbf{R}^n$, insbesondere die additiven Gruppen (**C**, +, ·) der komplexen Zahlen und (**H**, +, τ) der Quarternionen, ebenfalls topologische Gruppen sind. Die topologische Kennzeichnung von **R**, **C** und **H**, also den Zusammenhang von komplexen und hyperkomplexen Zahlen und der Topologie, leistet bekanntlich der

Satz von Pontrjagin: Es sei K ein zusammenhängender, lokal kompakter topologischer (Schief-) Körper. Dann ist K topologisch isomorph zu einem der Schief-)Körper **R**, **C** oder **H**.

Da wir ferner wissen, daß S auch zu Moufang-Loops und damit zu den hyperkomplexen Schiefkörpern einschließlich der Oktonionen isomorph ist (Toth 2005), folgt, daß nicht nur die **reelle**, sondern auch die **komplexe** und sogar die **hyperkomplexe** (**quaternionäre** und **oktonionäre**) **Semiotik** semiotische topologische Gruppen und sogar **semiotische topologische (Schief-)Körper** darstellen.

8. Zur semiotischen Dimensionstheorie

Der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen basiert auf dem sogenannten Permanenzprinzip: In **N** kann nicht immer die Differenz gebildet werden, also führt man die negativen Zahlen **Z** als neue Zahlen ein. Da in **Z** nicht alle Divisionen ausgeführt werden können, werden die rationalen Zahlen **Q** eingeführt. Die Forderung, daß jede Cauchy-Folge konvergiert, führt zu **R**, und die Lösbarkeit aller algebraischen Gleichungen, also auch von $x^2 + 1 = 0$, liefert **C**. 1843 erfand Hamilton die Quaternionen **H**, indem er das Kommutativgesetz der Multiplikation opferte. Der Satz von Frobenius charakterisierte dann die Quaternionen als einzigen echten endlich-dimensionalen Schiefkörper über **R**: "Wir sind also zu dem Resultate gelangt, daß außer den reellen Zahlen, den imaginären Zahlen und den Quaternionen keine anderen complexen Zahlen in dem oben definirten Sinne existieren" (Frobenius 1878: 63). Dieser Satz wurde übrigens von Charles Sanders Peirce, dem Begründer der Semiotik, in Unkenntnis der Frobeniusschen Arbeit 1881 ebenfalls bewiesen: "Thus it is proved, that a fourth independent vector is impossible, and that ordinary real algebra, ordinary algebra with imaginaries, and real quaternions are the only associative algebras in which division by finites always yields an unambiguous quotient" (Peirce 1881: 229).

Doch schon im Dezember 1843 – bloß zwei Monate nach Hamiltons Erfindung der Quaternionen – erfand J.T. Graves unter Opferung auch noch des Assoziativgesetzes der Multiplikation die Oktonionen (Oktaven, auch fälschlich Cayley-Zahlen genannt). Entsprechend dem Frobeniusschen Einzigkeitssatz für Quaternionen ist dann aus einer Arbeit von Zorn (1933) ein Einzigkeitssatz für Oktonionen ableitbar: "Jede nullteilerfreie, alternative, quadratische reelle, aber nicht assoziative Algebra A ist zur Cayley-Algebra **O** isomorph" (Ebbinghaus et al. 1992: 216). Beide Einzigkeitssätze erlauben ferner folgende Verallgemeinerung in Form eines "Struktursatzes": "Jede nullteilerfreie, alternative, quadratische reelle Algebra ist isomorph zu **R**, **C**, **H** oder **O** (Ebbinghaus et al. 1992: 216).

Nun fällt auf, daß die Divisionsalgebren von **R**, **C**, **H** und **O** die Dimensionen 1, 2, 4, 8 haben. Doch leider: "Bis heute können die Algebraiker nicht zeigen, daß jede Divisionsalgebra die Dimensionen 1, 2, 4 oder 8 haben muß. Mit topologischen Methoden läßt sich diese erstaunliche Tatsache beweisen" (Ebbinghaus et al. 1992: 233). 1940 zeigte Heinz Hopf, daß die Dimension einer endlich-dimensionalen, reellen Divisionsalgebra notwendig eine Potenz von 2 ist. Mit relativ beträchtlichem Aufwand (sie benutzten den Periodizitätssatz von Raoul Bott über die Homotopiegruppen der unitären und orthogonalen Gruppen) bewiesen dann 1958 unabhängig voneinander John W. Milnor und Michael A. Kervaire, daß die Hopfsche Potenz von 2 gleich 1, 2, 4 oder 8 sein muß.

In Toth (2007: 29ff) wurde gezeigt, daß man die Semiotik auf die Gaußsche Zahlenebene abbilden kann und daß den vier Quadranten der dergestalt erreichten komplexen semiotischen Ebene Zeichenklassen und Realitätsthematiken korrespondieren, welche sich dadurch auszeichnen, daß jeweils keines, eines oder beide Primzeichen der Subzeichen einer triadischen Zeichenrelation ein negatives Vorzeichen bekommt, also zum Beispiel (3.1 2.1 1.1), (-3.1 -2.1, -1.1), (-3.-1 -2.-1 -1.-1), (3.-1 2.-1 1.-1). Eine "reguläre" Zeichenklasse wie (3.1 2.1 1.1) kann dann durch semiotische Transformationen in eine "irreguläre" Zeichenklasse umgewandelt werden (vgl. Toth 2001b), wobei jeweils entweder die x-Achse oder die y-Achse oder beide einmal oder mehrfach durch die semiotischen Funktionsgraphen geschnitten werden. Dies wurde in Toth (2001a) dahingehend interpretiert, daß es offenbar bereits mit den mathematischen Mitteln der monokontexturalen Semiotik möglich ist, semiotische "Jenseitse" zu erreichen, von denen im Rahmen der Peirceschen nicht-transzendentalen Semiotik, welche sich auf den I. Quadranten beschränkt, noch nicht einmal eine Vorstellung herrscht. Es ist dabei wichtig, zu betonen, daß diese drei vom I. Quadranten aus gesehen transzendenten semiotischen Bereiche vom die monokontexturale Realität semiotisch abbildenden monokontexturalen Bereich aus erreicht werden. So konnten also die vier Quadranten der komplexen semiotischen Ebene in einem gewissen eingeschränkten Sinne als "semiotische Kontexturen" interpretiert werden. Unter Berücksichtigung des Satzes von Kervaire und Milnor heißt das nun aber folgendes: Eine in einer immanenten semiotischen Welt startende semiotische Kontexturüberschreitung in transzendente semiotische Welten erfordert eine 2-, 4- oder 8-dimensionale Semiotik, d.h. eine komplexe, quaternionäre oder oktonionäre Semiotik. Eine komplexe Semiotik existiert bereits (Toth 2007: 23-40), zu einer hyperkomplexen Semiotik wurden wenigstens die Grundlagen gelegt (Toth 2007: 40-45).

Nun ist es natürlich auch möglich, eine "echte" polykontexturale Semiotik zu konstruieren (Toth 2003a). Sie also steht einer "unechten" polykontexturalen Semiotik, wie sie eben skizziert wurde, gegenüber. Und dennoch haben beide mathematisch-semiotischen Modelle ihre Existenzberechtigung. So könnte man nämlich zur Illustration für eine "echte" polykontexturale Semiotik etwa die im deutschen Sprachraum zuerst von Gotthard Günther edierten amerikanischen Science Fiction-Romane heranziehen: Sie beginnen, handeln und enden meistens in einer von der unseren aus gesehen transzendenten Welt (vgl. Günther 1952).

Als Beispiele für eine "unechte" polykontexturale Semiotik mögen dagegen vor allem die Werke E.T.A. Hoffmanns und Oskar Panizzas stehen (vgl. Toth 2003b). Diesen beiden Autoren ist gemeinsam, daß ihre Erzählungen in unserer immanenten Welt beginnen, sich in einer von ihr aus gesehen transzendenten Welt abspielen und entweder in der Transzendenz oder (meistens) zurück in der Immanenz enden; vgl. etwa den Anfang von Panizzas Erzählung "Das Wirtshaus zur Dreifaltigkeit": "Es mag wohl in Franken gewesen sein, wo ich vor mehreren Jahren auf einer meiner Fußtouren zur Winterszeit gegen Abend auf eine lange, hartgefrorene Landstraße kam […]" – man beachte die relativ präzisen Angaben zur Fixierung der Erzählung in unserer monokontexturalen Welt. Doch unversehens finden wir uns in einer anderen, transzendenten, Welt wieder, wenn wir nämlich entdecken, daß offenbar die Heilige Familie mitsamt dem Teufel (im Schweinestall) die Wirte im besagten Wirtshaus sind, in dem der Ich-Erzähler einkehrt und das, nota bene, auf keiner Landkarte vermerkt ist (Panizza 1914: 3). Und wenn wir ferner lesen, was dem Ich-Erzähler bei der Bezahlung seiner Übernachtung geschieht: "Der Alte gab mir mit Mühe und Noth die paar Batzen heraus, von denen ich erst später zu meiner nicht geringen Verwunderung sah, daß es ausländisches Geld und mit den Bildnißen des Königs Herodes und des römischen Kaisers Augustus geschmückt war" (Panizza 1914: 24), dann wird uns klar, daß Panizza mit räulicher und zeitlicher Transzendenz arbeitet. Als der Erzähler dann das Wirtshaus zur Dreifaltigkeit verläßt, kommt ihm alles "prosaischer und interesseloser" vor "als den vorherigen Abend", denn er ist zurück in der Immanenz: "Keine zwanzig Schritt von mir […] saß ein Steinklopfer bei seiner Arbeit und hämmerte tüchtig darauf los. Ich konnte nicht umhin, auf ihn zuzugehen. 'He! Alter,' rief ich ihn an, 'kennt Ihr das Wirtshaus da hinten im Wald?' – 'Jo, jo!' antwortete er im besten Fränkisch, 'Sell is a Abdeckerei!'" (Panizza 1914: 24).

9. Bibliographie

Alexandroff, Paul und Paul Urysohn: Zur Theorie der topologischen Räume. In: Mathematische Annalen 92 (1924), S. 258-266.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al.: *Zahlen.* 3. Aufl. 1992, Berlin: Springer.

Frobenius, Ferdinand Georg: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), S. 1-63.

Günther, Gotthard: Kommentar des Herausgebers. In: ders. (Hrsg.), *Überwindung von Raum und Zeit.* 1952, Düsseldorf: Rauch, S. 223-238.

Hausdorff, Felix: *Grundzüge der Mengenlehre.* 1914, Neudruck 1978, New York: Chelsea.

Hilbert, David: *Grundlagen der Geometrie.* 13. Aufl. 1987, Stuttgart: Teubner.

Panizza, Oskar: *Visionen der Dämmerung.* 1914, München und Leipzig: Georg Müller.

Peirce, Charles S.: On the algebras in which division is unambiguous. In. American Journal of Mathematics 4 (1881), S. 225-229.

Steen, Lynn A. und J. Arthur Seebach: *Counterexamples in Topology.* 1970, New York: Holt, Rinehart and Winston.

Toth, Alfred: *Grundlegung einer mathematischen Semiotik.* 1999, Albuquerque, NM: unveröff. Ms., 397 S.

Toth, Alfred: *Zwischen den Kontexturen.* 2001, Albuquerque, NM: unveröff. Ms., 205 S. (= Toth 2001a).

Toth, Alfred: Skizze einer transzendentalen Semiotik. In: Bernard, Jeff und Gloria Withalm (Hrsg.), *Mythen, Riten, Simulakra. Akten des 10. Internationalen Symposiums der Österreichischen Gesellschaft für Semiotik.* Bd. 1. 2001, Wien: ÖGS, S. 117-134 (= Toth 2001b).

Toth, Alfred: *Die Hochzeit von Semiotik und Struktur.* 2003, Klagenfurt: Institut für Technik- und Wissenschaftsforschung (= Klagenfurter Beiträge zur Technikdiskussion, Heft 101) (= Toth 2003a).

Toth, Alfred: Oskar Panizzas Forderung eines Neo-Hegelianismus. Unveröff. Ms. (= Toth 2003b).

Toth, Alfred: Semiotische Quasigruppen. In: GrKG/H 46-4 (2005), S. 178-187.

Toth, Alfred: *Grundlagen der mathematischen Semiotik.* 2007, Klagenfurt: Institut für Technik- und Wissenschaftsforschung (= Klagenfurter Beiträge zur Technikdiskussion, Heft 117).

Zorn, Max: Alternativkörper und quadratische Systeme. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 9 (1933), S. 395-402.